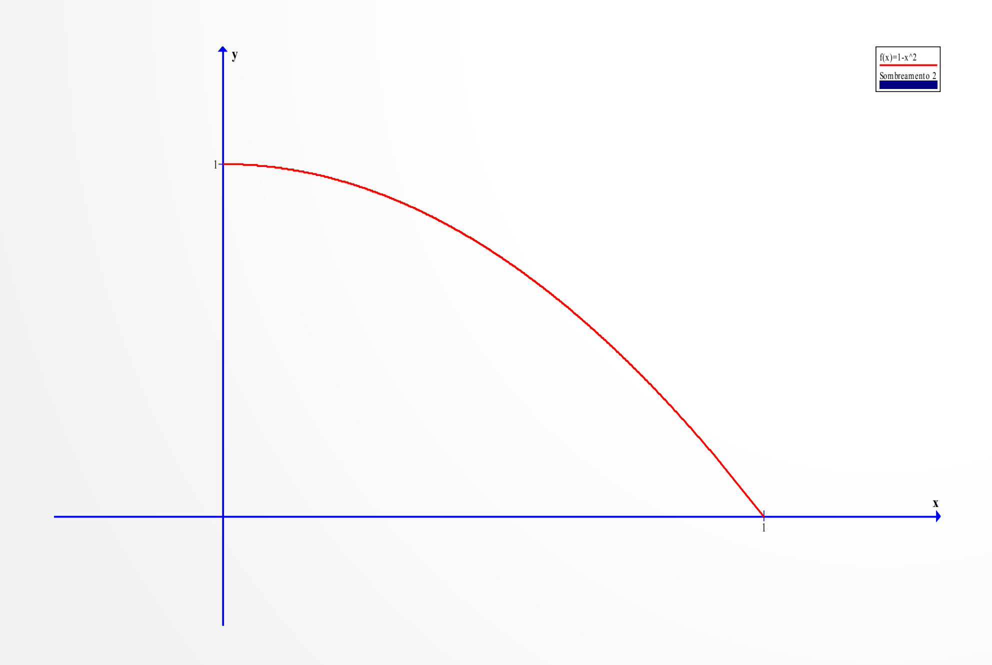
# Integração

- A integral é muito mais que uma antiderivada. É um método para calcular áreas e volumes das formas mais gerais.
- É uma ferramenta para calcular muito mais do que áreas e volumes. A integral é de fundamental importância em estatística, ciências e engenharia.



# Áreas

- Suponha que queiramos calcular a área da região R que se encontra acima do eixo x, abaixo da curva $y = 1 - x^2$ e entre as retas verticais $x = 0$ e $x = 1$.






- Podemos calcular a área repartindo-a em retângulos, e depois somá-los.
- Este processo pode ser feito para vários retângulos e quanto mais partições, mais precisa será a área.
- Para efetuar a soma de todas as áreas podemos calcular uma a uma e depois somá-las para obter a soma final.
- Usaremos a notação sigma.

# Notação sigma e limites de somas finitas

- A notação sigma permite expressar uma soma com muitos termos de forma compacta.

$$\sum_{k=1}^{n} a_k = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_{n-1} + a_n$$

A letra grega $\sum$ significa “soma”. O índice do somatório k diz onde começa(número abaixo do somatório) e onde termina (número acima do somatório).



# Exemplos 1

Escreva as somas na notação sigma:

$$a)\,1+2+3+4+5+6+7+8+9+10=$$

$$b)\,(-1).1+(-1)^2.2+(-1)^3.3+(-1)^4.4=$$

$$c)\,\frac{1}{1+1}+\frac{2}{2+1}+\frac{3}{3+1}+\frac{4}{4+1}+\frac{5}{5+1}=$$

$$d)\,\frac{4^2}{4-1}+\frac{5^2}{5-1}+\frac{6^2}{6-1}+\frac{7^2}{7-1}+\frac{8^2}{8-1}=$$



# Exemplo 2

- Expresse a soma 1+ 3 + 5 + 7 + 9 em notação sigma.



# Regras algébricas para somas finitas

$$(i)\sum_{k=1}^{n}(a_k+b_k)=\sum_{k=1}^{n}a_k+\sum_{k=1}^{n}b_k$$

$$(ii)\sum_{k=1}^{n}(a_k-b_k)=\sum_{k=1}^{n}a_k-\sum_{k=1}^{n}b_k$$

$$(iii)\sum_{k=1}^{n}ca_k=c.\sum_{k=1}^{n}a_k$$

$$(iv)\sum_{k=1}^{n}c=n.c$$



# Exemplo 3

- Utilize as regras algébricas:

$$a)\sum_{k=1}^{3}(k+4)$$

$$b)\sum_{k=1}^{n}(3k-k^2)$$

# Exemplo 4

- a) Mostre que a soma dos n primeiros números inteiros é

$$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$$

- b) Mostre que a soma dos quadrados dos n primeiros números inteiros é

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$



# Exemplo 4

- c) Mostre que a soma dos cubos dos n primeiros números inteiros é

$$\sum_{k=1}^{n} k^3 = \left( \frac{n(n+1)}{2} \right)^2$$

- Em todos os três casos usaremos indução matemática.



# Exemplo 5

- Expresse $\sum_{k=1}^{n} (k^2 - 4k + 3)$ em termos de n.



# Soma de Riemann

- O matemático Riemann promoveu a precisão da teoria dos limites de aproximações finitas.
- O somatório que nos leva ao valor aproximado de uma área sob determinada curva em relação ao eixo x, é dado por

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} f(w_k)\Delta x_k$$

onde $w_k \in \left[x_{k-1}, x_k\right]$ e k = 1, 2, 3,...,n



- Aplicando o $\lim_{n \to \infty}$ , temos

$$\lim_{n \to \infty} S_n = \lim_{n \to \infty} \sum_{k=1}^{n} f(w_k) \Delta x_k = \int_a^b f(x)dx$$

- Podemos chamar a integral acima de integral de Riemann.



# Integral definida

Seja f definida em um intervalo fechado [a, b]. A ***integral definida*** de f, no intervalo dado, denotado por $\int_a^b f(x)dx$ , é

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{n \to \infty} \sum_{k=1}^{n} f(w_k)\Delta x_k$$

desde que o limite exista.



# Exemplo 6

Sejam $f(x) = 8 - \frac{1}{2}x^2$ , e partição P de [0, 6] nos cinco subintervalos determinados por

$$x_0 = 0 \ , x_1 = 1{,}5 \ , x_2 = 2{,}5 \ , x_3 = 4{,}5 \ , x_4 = 5 \ , x_5 = 6$$

Determine a soma de Riemann.



# Teorema

(i) Se f é contínua em [a, b], então f é integrável em [a, b].

(ii) Quando f e g são integráveis no intervalo [a,b], a integral definida satisfaz as propriedades da tabela seguinte.

# Propriedades das integrais de Riemann

$$(i)\int_b^a f(x)dx = -\int_a^b f(x)dx$$

$$(ii)\int_a^a f(x)dx = 0$$

$$(iii)\int_a^b kf(x)dx = k\int_a^b f(x)dx$$

$$(iv)\int_a^b (f(x) \pm g(x))dx = \int_a^b f(x)dx \pm \int_a^b g(x)$$

$$(v)\int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx = \int_a^c f(x)dx$$

$$(vi) f(x) \geq g(x) \quad em \quad [a,b] \Rightarrow \int_a^b f(x)dx \geq \int_a^b g(x)dx$$

# Exemplo 7

Para ilustrar algumas das regras, suponhamos que

$$\int_{-1}^{1} f(x)dx = 5,\ \int_{1}^{4} f(x)dx = -2,\ ,\int_{-1}^{1} h(x)dx = 7$$

$$a)\int_{4}^{1} f(x)dx = -\int_{1}^{4} f(x)dx =$$

$$b)\int_{-1}^{1} [2f(x)d + 3h(x)]dx =$$

$$c)\int_{-1}^{4} f(x)dx = \int_{-1}^{1} f(x)dx + \int_{1}^{4} f(x)dx$$

# Teorema

- Se f é integrável e $f(x) \geq 0$ para todo x em [a, b], então a ***área*** A da região sob o gráfico de f de a e b é

$$A = \int_a^b f(x)dx$$



# Exemplo 8

Calcular:

a) $\int_{-2}^{3} 7dx =$

b) $\int_{-2}^{4} (\frac{1}{2}x + 3)dx =$

# Teorema Fundamental do cálculo

Se f é contínua em qualquer ponto de [a, b] e se F é qualquer primitiva de f em [a, b], então

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

# Exemplo 9

Calcule as integrais definidas usando o teorema fundamental do cálculo:

$$a)\int_0^{\pi} \cos x\,dx =$$

$$b)\int_{-\pi/4}^{0} \sec x\,tg x\,dx =$$

$$c)\int_1^4 \left(\frac{3}{2}\sqrt{x} - \frac{4}{x^2}\right) dx =$$

# Exemplo 10

- Considere a função f(x)= sen x entre x = 0 e $x = 2\pi$ . Calcule

  a) a integral definida de f(x) em [0, $2\pi$ ]

  b) a área entre o gráfico de f(x) e o eixo x em [0, $2\pi$ ]

# Resumo

Para determinar a área entre o gráfico f(x) e o eixo x no intervalo [a , b]:

- Subdivida [a, b] nas raízes de f.
- Integre f em cada subintervalo.
- Some os valores absolutos das integrais.

# Exemplo 11

- Determine a área da região entre o eixo x e o gráfico de $f(x) = x^3 - x^2 - 2x$, no intervalo $[-1, 2]$.